FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Departman za proizvodno mašinstvo

OPTIMIZACIJA I LOGISTIKA PROIZVODNJE

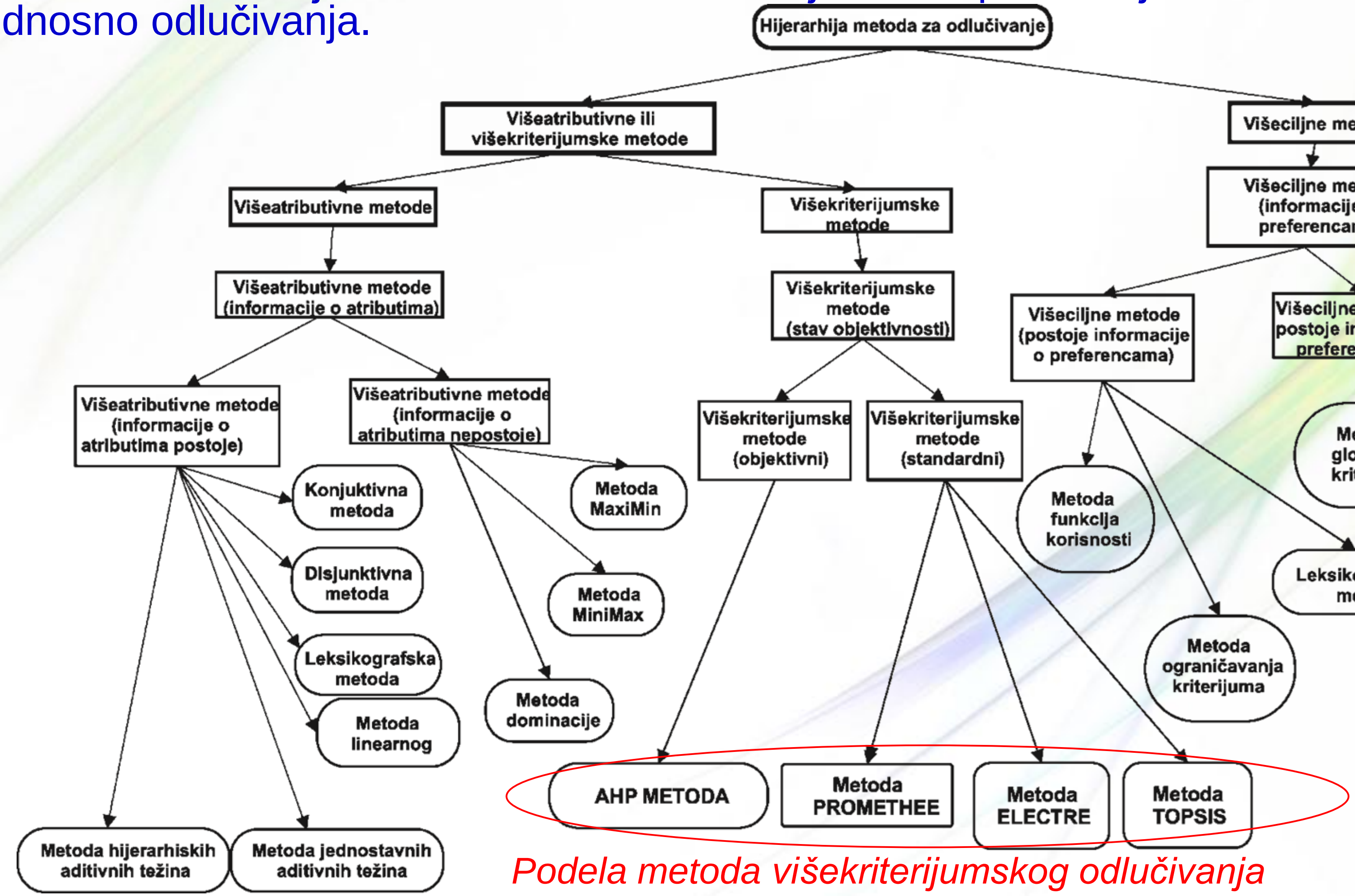
Tema:

METODE VIŠEKRITERIJUMSKOG VREDNOVANJA PROIZVODA

Prof. dr Dejan Lukić

Metode višekriterijumskog vrednovanja proizvoda

Kvalitet nekog proizvoda iz oblasti mašinogradnje određuju brojni pokazatelji, koji su obuhvaćeni grupom **tehničkih**, **ekonomskih**, **tehnoekonomskih** i ostalim elementima **kvaliteta**. Otuda je razvoj i primena pouzdanih metoda za ocenu ukupnog kvaliteta određenog proizvoda kompleksno pitanje jer se takvim metodama rešavaju složeni zadaci višekriterijumske optimizacije i vrednovanja, odnosno odlučivanja.



Podela metoda višekriterijumskog odlučivanja

Metode višekriterijumskog vrednovanja proizvoda

Najčešća klasifikacija ovih metoda je prema **karakteristikama alternativa ili dostupnosti informacija.**

Višekriterijumsko vrednovanje i rangiranje nekog proizvoda zahteva određene **faze i u postupku primene.**

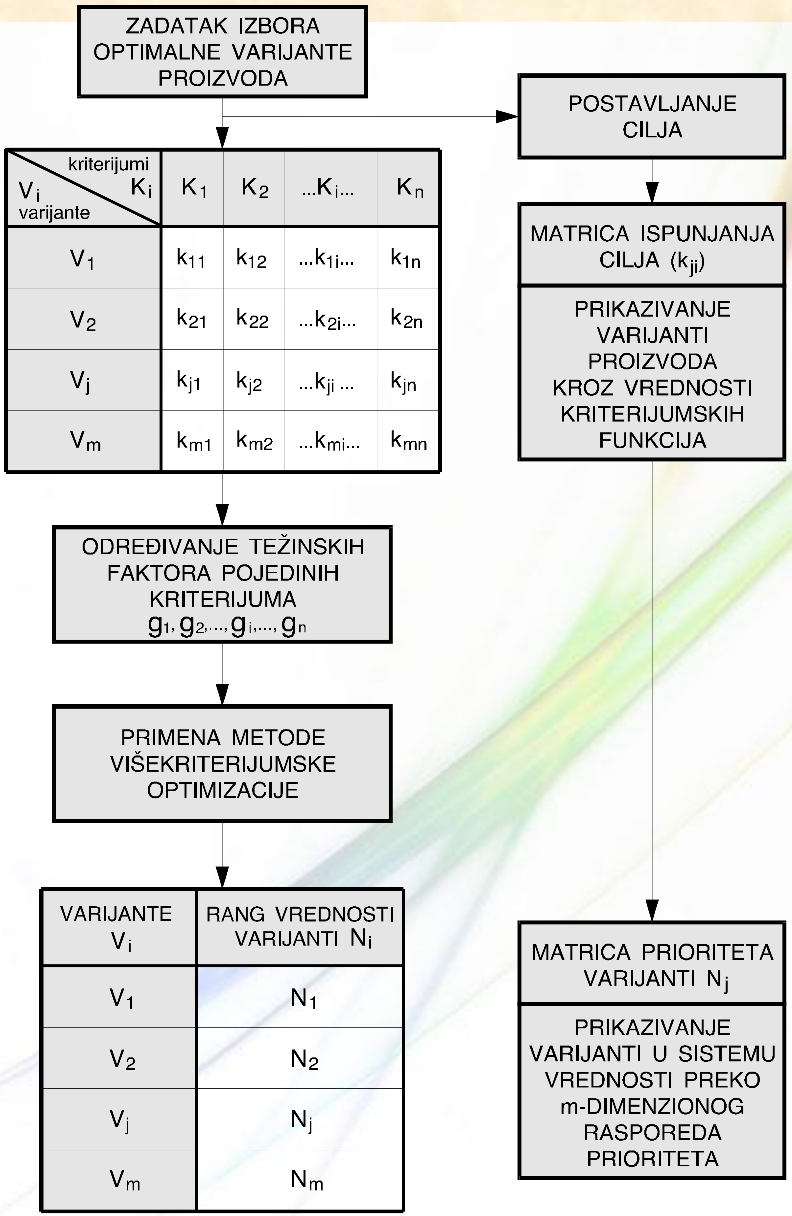
Kod svih metoda prisutne su **tri osnovne faze** njihove primene:

Prva faza se odnosi na **izbor varijanti proizvoda i utvrđivanje kriterijuma**, a **druga** na određivanje **težinskih faktora** ovih kriterijuma koji se koriste za ocenu posmatranih varijanti.

Treća faza obuhvata **ocenu, rangiranje i izbor najpovoljnije varijante** proizvoda primenom odgovarajućih metodologija.

U literaturi se, kod metoda vrednosnih ocena, kriterijumi najčešće nazivaju **parametrima ili elementima vrednosti određenog proizvoda**.

Kao osnovni uslov za ocenu ukupne, globalne vrednosti nekog proizvoda javlja se izbor **relativnih pokazatelja elemenata kvaliteta**, odnosno elemenata vrednosti (kriterijuma), kao i njihovih težinskih vrednosti, odnosno koeficijenata.



Postupak višekriterijumskog vrednovanja i rangiranja proizvoda

Metoda ukupne vrednosti

Metoda ukupne vrednosti, za koju se kao osnova koristi odgovarajuća **matrica parametara vrednosti** posmatranih **alternativa**, bazira na **analizi i utvrđivanju relevantnih vrednosnih parametara i njihovoj oceni** koju vrše **eksperti**.

U sledećoj fazi primene ove metode vrši se procena **relativnog značaja** vrednosnih parametara, odnosno težinskih faktora. Vrednosti težinskih faktora mogu se nalaziti u rasponu od 0 do 1, ili od 1 do 100, pri čemu zbir svih težinskih faktora mora biti 1, odnosno 100.

Ocena utvrđenih parametara vrednosti proizvoda može da se izvrši na osnovu **4 - 0** ili **10 - 0** ili **decimalnog** bodovnog sistema.

DESETOBODOVNI SISTEM			***ČETVOROBODOVNI SISTEM***	
Vrednost		***Značenje***	***VDI 2225***	
Decimalna	***Celobrojna***		***Vrednost***	***Značenje***
0,0	*0*	*apsolutno beskorisno rešenje*	*0*	*nezadovoljavajuće rešenje*
0,1	*1*	*izuzetno neadekvatno rešenje*		
0,2	*2*	*slabo rešenje*	*1*	*još podnošjivo rešenje*
0,3	*3*	*rešenje koje se još može tolerisati*		
0,4	*4*	*zadovoljavajuće rešenje*	*2*	*dovoljno rešenje*
0,5	*5*	*adekvatno rešenje*		
0,6	*6*	*dobro rešenje*	*3*	*dobro rešenje*
0,7	*7*	*bolje rešenje od dobrog*		
0,8	*8*	*vrlo dobro rešenje*	*4*	*vrlo dobro rešenje*
0,9	*9*	*Rešenje koje prevazilazi*		
1,0	*10*	*idealno rešenje*		

Metoda ukupne vrednosti

Ukupni broj bodova i-te varijante proizvoda za *j-ot* parametara određuje se prema izrazu:

$$W_{ij} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \cdot p_{ij}$$

g_{ij} - težinski faktor za *i-tu* varijantu proizvoda j, j=1,2,...,m

p_{ij} - bodovi za *i-tu* varijantu i broj parametara j=1,2,...,m.

Vrednost posmatrane varijante proizvoda u odnosu na **idealno rešenje** određuje se iz obrasca:

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} g_{ij} \cdot p_{ij}}{m \cdot p_{\max} \sum_{j=1}^{m} g_{ij}} \leq 1$$

p_{max} - broj bodova idealnog proizvoda

m - broj parametara vrednosti proizvoda.

Vrednost rešenja se može **stepenovati**.

Ocena proizvoda može se, dakle, izvršiti na osnovu ukupnog broja bodova ili na osnovu pokazatelja vrednosti.

U okviru metoda ukupne vrednosti posebno će se prikazati metoda **funkcije ukupne vrednosti** za ocenu proizvoda.

Veličina valjanosti W	*Ocena*
0,25 - 0,39	*Zadovoljava*
0,39 - 0,63	*Dovoljan*
0,63 - 0,88	*Dobar*
> 0,88	*Iznad postavljanog cilja*

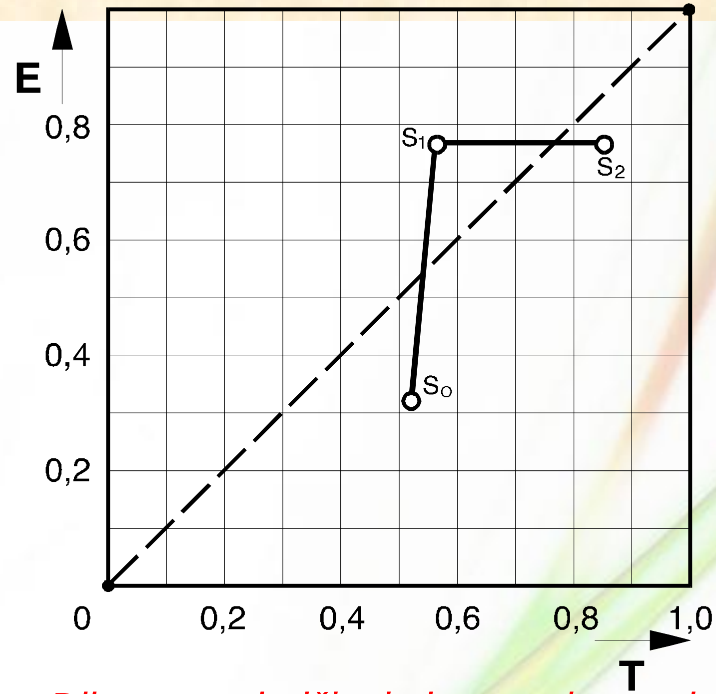
Ocena vrednosti proizvoda

Funkcija ukupne vrednosti

Prema VDI 2225 preporučuje se da se pri ocenjivanju proizvoda na dijagramu prikaže njegova **tehnička (*T*)** i **ekonomska (*E*)** vrednost.

Na osnovu ovakvih dijagrama može se, prema vrsti i funkciji proizvoda, svesno dati prednost tehničkoj ili ekonomskoj vrednosti, kao što je, na primer, kod aviona, apsolutna prednost data tehničkom kvalitetu, odnosno vrednosti.

Funkcija ukupne vrednosti u koordinatnom sistemu (*T, E*) predstavlja, dakle, oblik kompromisa zavisnosti između tehničke i ekonomske vrednosti proizvoda.



Dijagram tehničke i ekonomske vrednosti proizvoda sa razvojnim fazama S_o, S_1, S_2

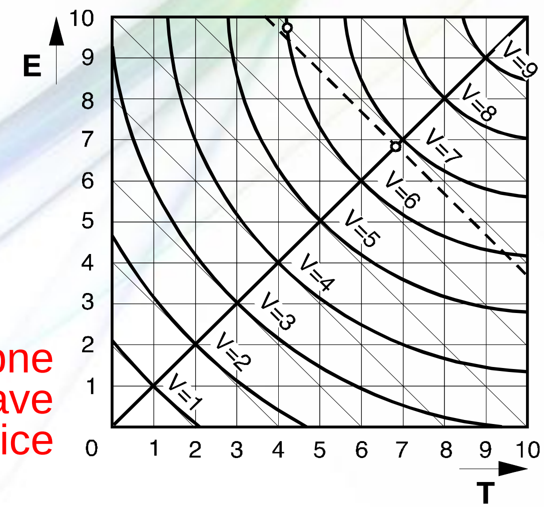
Prema preporukama VDI 2225, ova funkcija može biti u vidu prave, kružnice i hiperbole. Ako je funkcija u vidu prave, onda je njena vrednost određena izrazom:

$$V = \frac{E+T}{2}$$

a ako je u vidu kružnice određena je izrazom:

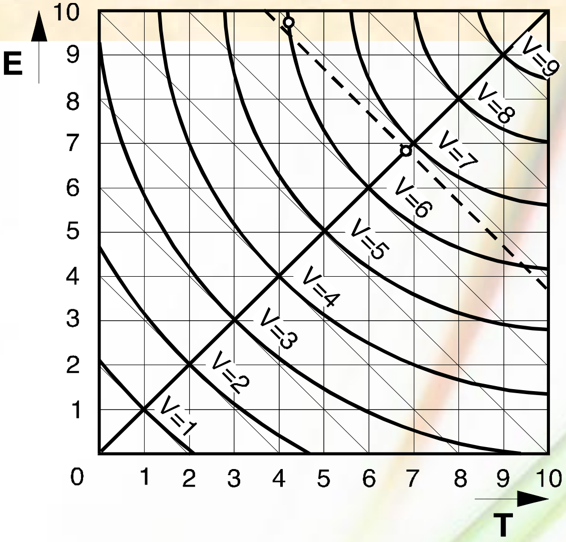
$$V = \left| \sqrt{\frac{(T-10)^2 + (E-10)^2}{2}} - 10 \right|$$

Funkcija ukupne vrednosti u obliku prave linije i kružnice



Funkcija ukupne vrednosti

Koristeći funkciju ukupne vrednosti u obliku prave, može se primetiti da proizvod kod koga je, na primer, tehnička vrednost $T=6,9$ i ekonomska vrednost $E=6,9$ ima manju ukupnu vrednost od proizvoda kod koga je $T=4,3$ i $E=9,7$. Međutim, primenom funkcije (V) u obliku kružnice, slika desno, za prvi slučaj se dobije da je ukupna vrednost proizvoda 6,9, kao i kod funkcije u obliku prave, a za drugi slučaj da je ukupna vrednost proizvoda 6, što je manje nego u slučaju funkcije ukupne vrednosti u obliku prave.



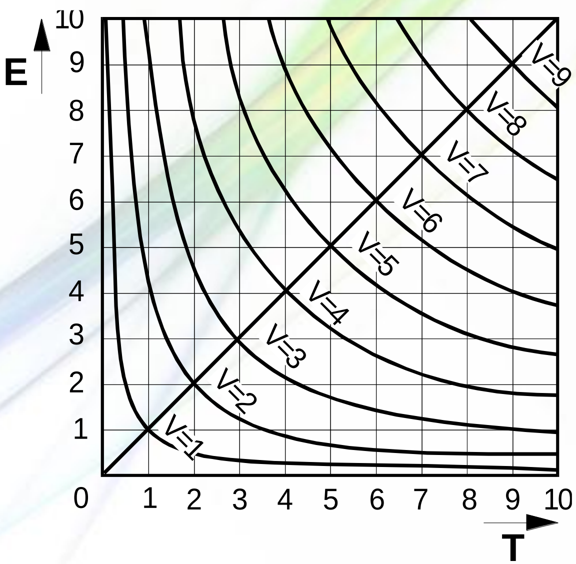
U oblasti $8<T\leq 10$ i $8<E\leq 10$ može se primeniti funkcija ukupne vrednosti u obliku **prave**.

U oblasti $2<T\leq 8$ i $2<E\leq 8$, kao pogodan oblik funkcije ukupne vrednosti koristi se **kružnica**.

Kod proizvoda sa izrazito neravnomernim tehničkim i ekonomskim vrednostima, $0<T\leq 2$ i $0<E\leq 2$, preporučuje se funkcija ukupne vrednosti u obliku **hiperbole**.

Ova funkcija određuje se iz izraza: $V=\sqrt{T\cdot E}$

Primenom ovog oblika funkcije ukupne vrednosti dobija se progresivan redukcioni faktor za rešavanje zadatka ocene proizvoda sa neravnomernim tehničkim i ekonomskim vrednostima.



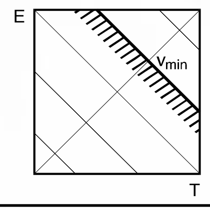
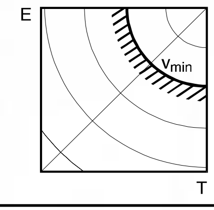
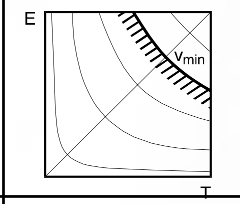
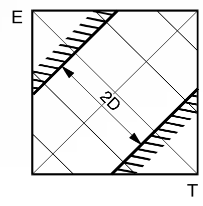
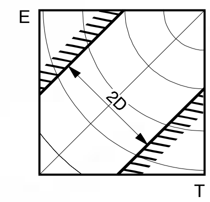
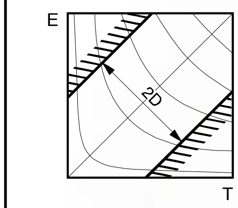
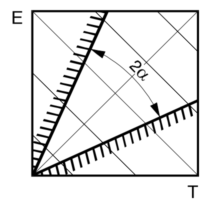
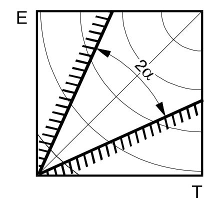
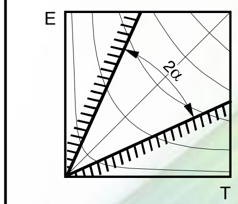
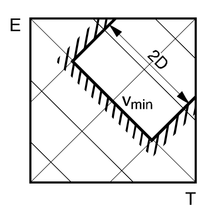
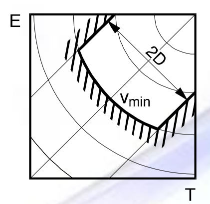
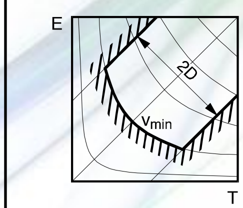
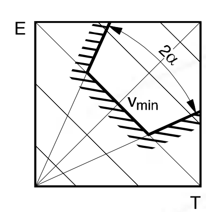
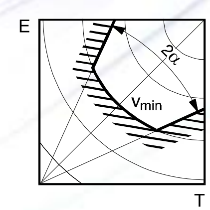
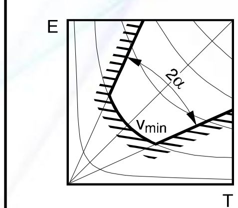
Funkcija ukupne vrednosti proizvoda u obliku hiperbole

Funkcija ukupne vrednosti

Izbor optimalnog područja T-E dijagrama

U opštem slučaju, može se desiti da je broj rešenja pri istoj ukupnoj vrednosti proizvoda **vrlo veliki**. Tada se uvode dodatni kriterijumi, tj. ograničenja za vrednosti *T* i *E*, kao i najniže ukupne vrednosti proizvoda.

Oblici pojedinih ograničenja mogu se grupisati prema pojedinim grupama proizvoda, u zavisnosti od zahteva koji se postavljaju u njihovoj eksploataciji. Ove zadatke rešavaju **eksperti** za pojedine grupe proizvoda.

FUNKCIJA UKUPNE VREDNOSTI			***Kriterijumi ograničenja***
PRAVA	***KRUŽNICA***	***HIPERBOLA***	
			*Kriterijum najniže vrednosti*
			*Paralelni kriterijum*
			*Ugaoni kriterijum*
			*Kombinacija paralelnog i kriterijuma najniže vrednosti*
			*Kombinacija ugaonog i kriterijuma najniže vrednosti*

Funkcija ukupne vrednosti

Određivanje tehničke i ekonomske vrednosti

Da bi se odredila funkcija ukupne vrednosti potrebno je objasniti **način** određivanja tehničke i ekonomske vrednosti proizvoda.

U skladu sa objašnjenjem koje je dato u vezi određivanja ukupne vrednosti proizvoda, za određivanje tehničke i ekonomske vrednosti proizvoda treba odrediti **odgovarajuće parametre vrednosti**, usvojiti sistem ocenjivanja, odnosno bodovanja, kao i **težinske faktore** za pojedine parametre tehničke, odnosno ekonomske vrednosti.

Na osnovu usvojenih **težinskih faktora** (*g*), **težinski vektor** (*G*) proizvoda biće:

$$G = \left\{ g_1, g_2, \ldots\ldots, g_j \right\}, \quad g_s \in [0,10], \quad ili \quad g_s \in [0,1], \quad s = (1,2,3,\ldots, j)$$

dok je **težinska suma** data izrazom:

$$\underline{G} = \sum_{s=1}^{j} g_s$$

Tehnička vrednost proizvoda se tada određuje iz izraza:

$$T = \frac{VT_1 + VT_2 + \ldots + VT_{ji}}{G_1 + G_2 + \ldots + G_j}$$

a ekonomska vrednost iz izraza:

$$E = \frac{VE_1 + VE_2 + \ldots + VE_{ji}}{G_1 + G_2 + \ldots + G_j}$$

Na osnovu ovih vrednosti moguće je odrediti ukupnu vrednost proizvoda, a na bazi **usvojenog oblika funkcije ukupne vrednosti** i **dodatnih kriterijuma** izvršiti ocenu proizvoda, odnosno odgovarajuću tehnoekonmsku analizu i strategiju razvoja konstrukcije proizvoda.

Ocena proizvoda na osnovu pokazatelja tehnoekonomskog nivoa

Pokazatelj tehnoekonomskog nivoa iskazuje **relativni odnos** nivoa proizvoda koji se **ocenjuje** i proizvoda (ili grupe proizvoda) koji je/su izabran/i za **upoređivanje**.

Primena ove metode sastoji se u kolektivnom rangiranju odabranih parametara koje, nezavisno jedan od drugoga, rangiraju članovi izabranog tima stručnjaka i matematičkoj obradi dobijenih podataka. Kao krajnji rezultat grupnih ocena mogu se dobiti dva kvantitativna pokazatelja:

Qt - pokazatelj tehnoekonomičnog nivoa proizvoda, procesa, resursa, itd. koji se ocenjuje u odnosu na proizvod, proces, resurs, itd. koji je izabran za uporedjivanje (reperni proizvod) - 1:1

Qs - pokazatelj konkurentske sposobnosti proizvoda, procesa, resursa, itd. koji se ocenjuje u odnosu na prosečan reperni (međunarodni) nivo takvog proizvoda, procesa, resursa, itd. - 1:n

U prvom koraku se određuje redosled parametara prema važnosti, koji predstavljaju kvalitativnu ocenu proizvoda. Zatim se indetifikuju težinski kojeficijenti parametara, odnosno njihova kvantitativna ocena.

POKAZATELJ TEHNOEKONOMSKOG NIVOA Qt

Pokazateljem tehnoekonomskog nivoa Qt se iskazuje relativni odnos nivoa “novog” proizvoda (proizvoda koji se ocenjuje) čiji su parametri Pin i nivoa “starog” proizvoda (proizvoda koji je uzet za upoređivanje) čiji su parametri Pis.

Kod ove metode se upoređuju dva prozvoda (1:1)

Bezdimenzioni koeficijent:

$$K_{it} = \frac{p_{in}}{p_{is}} \uparrow$$

Za parametre koji imaju tendenciju porasta

$$K_{it} = \frac{p_{is}}{p_{in}} \downarrow$$

Za parametre koji imaju tendenciju opadanja

Pokazatelj tehnoekonomskog nivoa Qt je odnos "novog/proizvod koji se posmatra" i "starog/proizvod koji je izabran za poređenje" rešenja:

$$Q_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_{it} b(i)}{\sum_{i=1}^{n} b(i)}$$

- **Qt=1 "novi" proizvod je na nivou "starog" proizvoda**
- **Qt<1 "novi" proizvod je ispod nivoa "starog" proizvoda**
- **Qt>1 "novi" proizvod je iznad nivoa "starog" proizvoda**

- Qt=1,0 – 1,1 nije perspektivan napredak

- Qt=1,1 – 1,2 malo perspektivan napredak

- Qt=1,2 – 1,3 perspektivan napredak

- Qt>1,3 veoma perspektivan napredak

POKAZATELJ MEĐUNARODNOG NIVOA Qs

Da se ne bi dobila ekstremno visoka ocena novog proizvoda koji se ocenjuje potrebno je pratiti izolovani bazni uzorak. To se rešava familijom sličnih složenih proizvoda koje zajednički obrazuju bazni uzorak. Bazni parametri su tada geometrijske sredine svih vrednosti odgovarajućih parametara.

Ако je za bazu uzet skup od „u“ proizvoda (mašina, resursa...) raznih proizvođača , vrednost i-tog baznog parametra se izračunava po formuli

$$\bar{p}_{iz} = \sqrt[u]{p_{i1} \cdot p_{i2} \cdot \ldots \ldots \cdot p_{iu}}$$

$\bar{p}_{iz}$ – **i-ti parametar skupa baznih uzoraka od (u) članova**

p_{iu} – **i-ti parametar u-tog proizvoda**

Bezdimenzioni koeficijent

$$k_{is} = \frac{p_{in}}{\bar{p}_{iz}} \uparrow$$

Za parametre koji imaju tendenciju porasta

$$k_{is} = \frac{\bar{p}_{iz}}{p_{in}} \downarrow$$

Za parametre koji imaju tendenciju opadanja

Pokazatelj međunarodnog nivoa Qs pokazuje :

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{is} b(i)}{\sum_{i=1}^{n} b(i)}$$

- **Qs=1 “novi” proizvod je na nivou “međunarodnog” proizvoda**
- **Qs<1 “novi” proizvod je ispod nivoa “međunarodnog” proizvoda**
- **Qs>1 “novi” proizvod je iznad nivoa “međunarodnog” proizvoda (isto kao za Qt vrednosti iznad 1,1; 1,2; 1,3)**

Izbor i rangiranje vrednosnih parametara

Za primenu metode pokazatelja tehnoekonomskog nivoa, jedan od osnovnih uslova primene odnosi se na utvrđivanje stepena **dvotrećinske saglasnosti eksperata** u vezi **predloženih parametara** vrednosti proizvoda i njihove **rang liste**. Stepen saglasnosti eksperata u pogledu predloženog redosleda vrednosnih parametara određuje se iz obrasca:

$$w_j = \frac{a_j}{n}, \qquad 0 \le w_j \le 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

a_j - broj istih mišljenja o redosledu parametara,

n - ukupni broj vrednosnih parametara,

m - broj eksperata, ocenjivača.

Na osnovu ovako izračunatih vrednosti stepena saglasnosti eksperata može se nacrtati **histogram raspodele funkcija**, u kome se za pojedine **statističke klase** (w_j) unose **frekvencije**, odnosno broj eksperata čiji stepeni saglasnosti ulaze u širine klasa.

Provera stepena dvotrećinske saglasnosti eksperata vrši se prema obrascu:

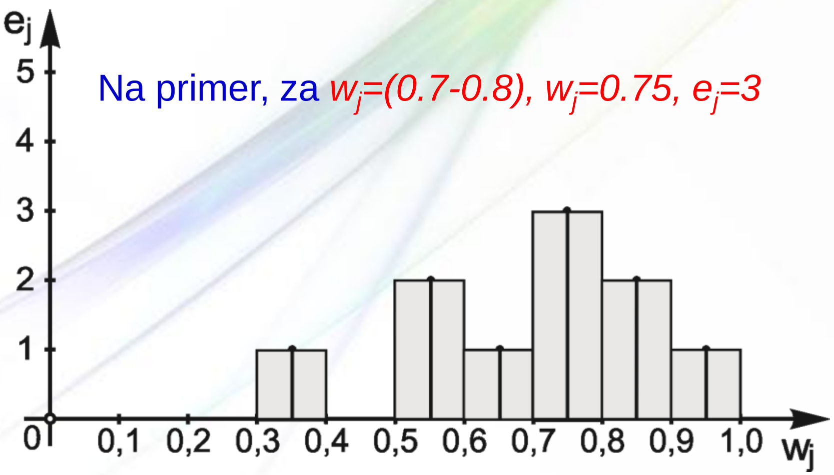
$$U(w) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \overline{w}(j) \cdot e_j$$

gde su:

$\overline{w}_j$ - aritmetička sredina statističke klase (w_j),

e_j - frekvencija.

Ako je $U(w)>0,67$, ispunjen je uslov dvotrećinske saglasnosti eksperata, pa se može izvršiti ocena tehnoekonomskog nivoa posmatranog proizvoda.

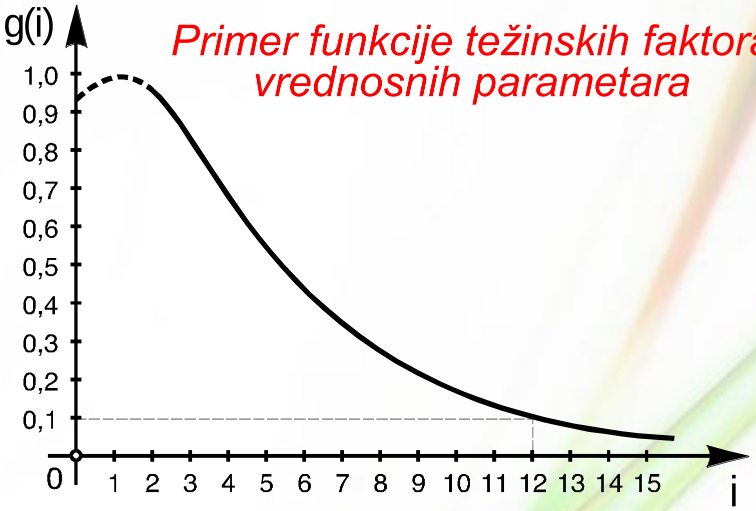


Histogram raspodele funkcija

Određivanje težinskih faktora

Težinski faktori (g_i) mogu, kod primene ove metode, da se odrede iz funkcije težinskih faktora, oblika:

$$g(i) = \frac{i+2}{2{,}1^{\frac{i+2}{2}}}$$



Primer funkcije težinskih faktora vrednosnih parametara

Veličina greške težinskih faktora, koji se određuju na ovaj način, zavisi od oblika krive i broja parametara vrednosti proizvoda.

Funkcije težinskih faktora (g_i) moraju ispuniti sledeće uslove

- g(i)=1 za I, najvažniji parametar
- g(i→∞) za veliki broj parametara (kriterijuma) težinski koeficijentiза poslednjih parametara teže ka nuli
- $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{g(i+1)}{g(i)} \leq 1$ funkcija težinskih koeficijenata teži 0 kada i teži beskonačnosti
- g(i)>g(i+1) за 1<i<∞ funkcija težinsjuh koeficijenata mora biti monotono opadajuća, odnosno ne sme imati ekstreme

Detaljnije dato na vežbama.

AHP metoda (Tomas L. Saaty)

Analitički hijerarhijski proces (**AHP**) je strukturisana tehnika pomoću koje se donose složene odluke. Pre nego što se donese "ispravna" odluka, AHP pomaže donosiocima odluka da pronađu onu odluku koja je najbolja za zadani cilj i rešavanje problema.

Ova metoda pruža sveobuhvatan i racionalni okvir za strukturiranje problema odlučivanja, zastupanje i kvantifikovanje elemenata problema. AHP metoda ima posebnu primenu **u grupnom odlučivanju**, koristi se u širokom spektru rešavanja **konfliktnih** situacija, u oblastima kao što su **vlada, biznis, industrija, zdravstvo i obrazovanje**.

Kad se definiše **hijerarhija problema**, donosioci odluke sistematski **upoređuju elemente u parovima** tako što im dodaju **težine** (preferencije). Prilikom dodavanja težina, donosioci odluka mogu da **koriste konkretne podatke** kao i **svoja mišljenja** o relativnim značenjima elementa. Suština AHP metode je da se pored konkretnih podataka koriste i subjektivna mišljenja. Za subjektivna mišljenja se koristi Saaty-jeva skala. Mogućnost unošenja subjektivnih mišljenja bitno razlikuje AHP metodu od ostalih metoda.

Upotreba i primena AHP metode je vrlo široka: od **pojedinačnih jednostavnih odluka** do **vrlo složenih odluka** koje donose **veliki broj članova** gde su uključene razne ljudske percepcije i predrasude, a rešenja imaju dugoročne posledice.

AHP metoda ima jedinstvenu prednost kada se važni elementi odluke **teško kvantifikuju** ili porede i tamo gde je **komunikacija između članova tima ometana** zbog različitih specijalnosti članova tima, upotrebljavane terminologije i stavova članova tima.

Aksiomi na kojima se AHP zasniva

Aksiom recipročnosti. *Ako je element **A** n puta značajniji od elementa **B**, tada je element **B** 1/n puta značajniji od elementa **A**,*

Aksiom homogenosti. *Poređenje **ima smisla** jedino ako su elementi **uporedivi**, npr. ne mogu se porediti jedinice mase sa jedinicama buke,*

Aksiom zavisnosti. *Dozvoljava se poređenje među **grupom elemenata jednog nivoa** u odnosu **na elemente višeg nivoa**, tj. poređenja na nižem nivou zavise od elementa višeg nivoa,*

Aksiom očekivanja. *Svaka promena u strukturi hijerarhije zahteva **ponovno računanje prioriteta** u novoj hijerarhiji.*

Navedeni aksiomi se koriste za definisanje **dva osnovna zadatka** u AHP metodi i to:

1. *Formulisanje i rešavanje zadatka hijerarhijski (aksiom 3 i aksiom 4),*
2. *Izvlačenje zaključaka pomoću poređenja po parovima (aksiom 1 i 2)*

Većina pomoćnih metodologija za donošenje odluka zahtevaju da donosilac odluke **ne pravi greške** prilikom dodeljivanja preferencija. Međutim, u **AHP** metodi je uključena činjenica da se **greške u zaključivanju pojavljuju**. Donosilac odluke greške može izbeći ili se suočiti sa njima. Osobina AHP metode da prihvata greške je njena najveća prednost.

Primena AHP metode može se objasniti u **četiri osnovna koraka.**

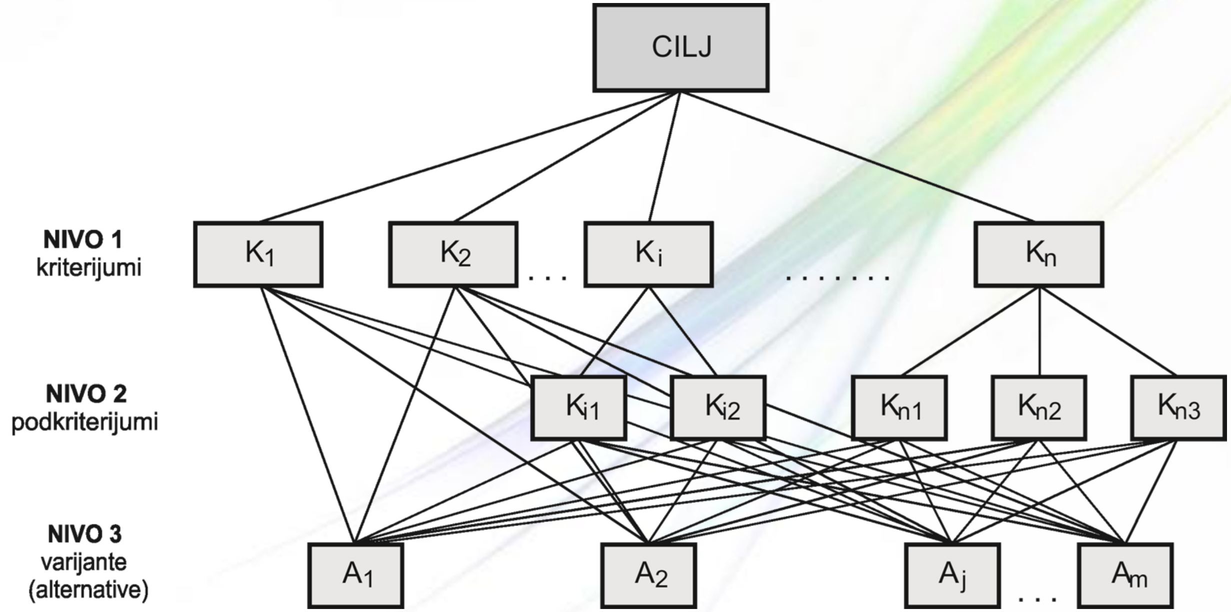
Korak 1: Razvoj i definicija

Hijerarhija je slojevit sistem rangiranja i organizovanja ljudi, stvari, ideja, itd. U hijerarhiji svaki element sistema, osim na prvom mestu, **ima podređene i nadređene slojeve**. Iako se koncept hijerarhije shvata intuitivno, može se matematički opisati. **Dijagrami hijerarhija su u obliku piramide**.

Ljudske organizacije su često strukturirane kao hijerarhije. Hijerarhija se koristi za dodeljivanje odgovornosti, vežbanje liderstva i odgovornosti, olakšavanje komunikacije itd.

Dizajn bilo koje AHP hijerarhije će zavisiti ne samo od prirode problema nego i od znanja, mišljenja, vrednosti, potreba i želja učesnika u procesu donošenja odluka. **Izgradnja hijerarhije obično dovodi do značajnih diskusija, istraživanja i otkrića** od strane učesnika u donošenju odluka.

Hijerarhijski model problema odlučivanja se razvija s **ciljem na vrhu**, **kriterijumina i podkriterijumima na nižim nivoima** i sa **alternativama na dnu modela**.



Hijerarhijska struktura postupka odlučivanja u AHP metodi

Korak 2: Prikupljanje podataka i njihovo merenje

Prikupljanjem podataka i njihovim **merenjem** počinje drugi korak. Donosilac odluke dodeljuje relativne ocene parovima atributa jednog hijerarhiskog nivoa, i to ponavlja za sve nivoe hijerarhije. Relativne ocene donosilaca odluke se izražavaju uz pomoć odgovarajuće skale (Saaty-eva skala relativne važnosti) koja ima **9 stepena verbalno opisanih intenziteta** i odgovarajuće **numeričke vrednosti.**

SKALA PROCENE ODNOSA VAŽNOSTI POJEDINIH ATRIBUTA ***V(xi /xj) = gi /gj = aij; aij=1/aji***			
Odnos važnosti		***OPIS***	***OBJAŠNJENJE***
gi /gj	*gj /gi*		
1	***(1)***	***Jednaka važnost***	***Oba atributa imaju jednak doprinos u odnosu na postavljeni cilj***
2	***(1/2)***	***Veoma mala prednost x_i u odnosu na x_j***	***Atribut x_i ima jedva primetnu prednost u odnosu na x_j, pri čemu se oni ipak ne mogu tretirati kao jednako važni***
3	***(1/3)***	***Mala prednost x_i u odnosu na x_j***	***Iskustvo i rasuđivanje upućuju na davanje jasno uočljive male prednosti jednog atributa nad drugim***
5	***(1/5)***	***Velika prednost x_i u odnosu na x_j***	***Iskustvo i rasuđivanje upućuju na davanje znatne prednosti jednog atributa u odnosu na drugi***
7	***(1/7)***	***Vrlo velika prednost x_i u odnosu na x_j***	***Atribut x_i jako dominira nad atributom x_j za čega postoje i potvrde iz prakse***
9	***(1/9)***	***Ekstremno velika prednost x_i u odnosu na x_j***	***Evidentna, neosporna i dokazana izrazita dominacija atributa x_i nad atributom x_j***
4, (1/4)	***6, (1/6)***	***8, (1/8)***	***Međuvrednosti koje pripadaju kontinuumu predložene skale i koje se koriste kada je striktan izbor vrednosti otežan***

Korak 2: Prikupljanje podataka i njihovo merenje

Primer ocenjivanja pomoću Saaty-jeve skale u kojem su upoređene neke od kriterijuma za izbor automobila:

Kriterijum		*Koji kriterijum je važniji*	*Intezitet prema skali*
A	***B***		
Cena	*Sigurnost*	***A***	***3***
Cena	*Stil*	***A***	***9***
Cena	*Kapacitet*	***A***	***3***
Sigurnost	*Stil*	***A***	***7***
Sigurnost	*Kapacitet*	***A***	***1***
Stil	*Kapacitet*	***B***	***1/7***

Po završetku ovog koraka dobija se odgovarajuća **matrica upoređivanja po parovima** koji odgovaraju **svakom nivou hijerarhije**.

Korak 3: Procena težinskih faktora

Procena težinskih faktora je **treći korak**. Matrica poređenja će se po parovima prevesti u probleme određivanja sopstvenih vrednosti radi dobijanja **normalizovanih i jedinstvenih sopstvenih vektora** težina za sve atribute na svakom nivou hijerarhije: $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ sa vektorom težina : $t = \left(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n\right)$

Neka je n broj kriterijuma (ili alternativa) čije težinske faktore g_i treba odrediti na osnovu procene vrednosti njihovih odnosa koji se označavaju sa: $a_{ij} = \dfrac{g_i}{g_j}$

Od odnosa relativnih važnosti a_{ij} formira se **matrica relativnih važnosti** A.

Saaty je ponudio vektorski pristup za procenu težinskih faktora iz matrice poređenja ***A***, koja je teorijski i praktično dokazana i najčešće primenjivana metoda.

Korak 3: Procena težinskih faktora

Matrica *A* ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2m} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{g_1} & \frac{g_1}{g_2} & .... & \frac{g_1}{g_m} \\ \frac{g_2}{g_1} & \frac{g_2}{g_2} & .... & \frac{g_2}{g_m} \\ .... & .... & .... & .... \\ \frac{g_m}{g_1} & \frac{g_m}{g_2} & .... & \frac{g_m}{g_m} \end{bmatrix}$$

Izračunava se: $\underline{W}$ - vektora pondera matrice *A*

λ_{max} - najveći karakteristični koren matrice *A*,

I - jedinična matrica,

Pošto se postupak sprovede do poslednjeg nivoa na kom su alternative,na kraju se određuju **kompozitni težinski faktori svih alternativa**. Zbir ovih koeficienata je 1, a donosilac odluke raspolaže sa dve ključne informacije:

1. *Poznat je **relativan značaj svake alternative** u odnosu na cilj na vrhu hijerarhije (**ocena značajnosti**),*
2. *Utvrđen je **redosled alternativa po značaju** (**rangiranje**).*

Korak 4: Analiza osetljivosti

Vršenje analize osetljivosti se uglavnom primenjuje kod **računarom podržanog odlučivanja**. **Variraju se težinski koeficijenti** pojedinih kriterijuma i ispituje osetljivost pojednih alternativa na promene. **Ispitivanje konzistentnosti** je ispitivanje doslednosti postavljenih težinskih koeficijenata kriterijuma i odnosa u modelu.

Konzistentnost AHP metode

AHP spada u popularne metode zato što ima sposobnost da identifikuje i analizira **nekonzistentnosti donosioca odluka** u procesu rasuđivanja i vrednovanja elemenata hijerarhije. Čovek je, naime, retko konzistentan pri procenjivanju vrednosti ili odnosa kvalitativnih elemenata u hijerarhiji. AHP na određen način ublažava ovaj problem tako što **odmerava stepen nekonzistentnosti i o tome obaveštava donosioca odluka**.

Kada bi postojala mogućnost da se precizno odrede vrednosti težinskih koeficijenata svih elemenata koji se međusobno porede na datom nivou hijerarhije, sopstvene vrednosti matrice odlučivanja bile bi **potpuno konzistentne**. Međutim, ako se npr. tvrdi da je A mnogo većeg značaja od B, B nešto većeg značaja od C, i C nešto većeg značaja od A, nastaje **nekonzistentnost** u rešavanju problema i **smanjuje se pouzdanost rezultata**.

Opšti je stav da redundantnost poređenja u parovima čini AHP metoda da nije previše osetljiva na greške u rasuđivanju. Ona takođe daje mogućnost da se mere greške u rasuđivanju tako što se **izračunava indeks konzistentnosti za dobijenu matricu poređenja**, a zatim se izračunava i **stepen konzistentnosti**.

Konzistentnost AHP metode - Matematički model

Da bi se izračunao **stepen konzistentnosti** CR, prvo treba izračunati **indeks konzistentnosti** CI prema relaciji:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

Što je λ_{max} bliže broju n *(broj kriterijuma)*, manja će biti nekonzistentnost.

Da bi se izračunalo λ_{max}, prvo treba pomnožiti matricu poređenja sa vektorom težinskih koeficijenata da bi se odredio vektor b:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Deljenjem korespodentnih elemenata vektora b i g dobija se:

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1}{g_1} \\ \frac{b_2}{g_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{b_n}{g_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

a konačno je:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Uz pomoć λ_{max} dobija se indeks konzistentnosti CI, dok setepen konzistentnosti CR predstavlja odnos indeksa konzistentnosti i **slučajnog indeksa** RI:

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

Slučajni indeks RI **zavisi od reda matrice**, a preuzima se iz tabele u kojoj prvi red predstavlja red matrice poređenja, a drugi slučajne indekse.

Ako za matricu važi $CR \leq 0.10$, procene težinskih koeficijenata smatraju se **prihvatljivim**.

Konzistentnost AHP metode - Matematički model

Slučajni indeksi RI:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

U slučaju da stepen konzistentnosti ne zadovoljava, **treba istražiti razloge** zbog kojih je nekonzistentnost procena neprihvatljivo visoka. Vrlo je bitno da se dobije nivo konzistencije manji od 0.1 na svim nivoima hirejarhije kako bi obezbedili put za dobijanje ispravnih rešenja.

Metodologija **rangiranja** i izbora **najpovoljnije** varijante

Zadatak rangiranja i izbora najpovoljnije varijante proizvoda, odnosno velikog broja poređenja po različitim kriterijumima, odnosno obeležjima, može se rešiti uvođenjem kompleksne mere odstojanja između **fiktivne varijante** $a^{(-)}$, generisane iz **najlošijih vrednosti obeležja** $x_j^{(-)}$ skupa **stvarnih varijanti**, odnosno:

$$\{ a_i \} \rightarrow d\ [a_i, a^{(-)}]$$

Da bi se prikazao konačni oblik funkcije, odnosno kompleksne mere **rastojanja** bilo koje varijante a_i od **fiktivne najlošije** $a^{(-)}$ pogodno je sve elemente kvaliteta proizvoda, odnosno obeležja proizvoda $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ **podeliti u tri grupe**.

Operisanje sa većim brojem obeležja najjednostavnije se može rešiti formiranjem funkcije $d\ [a_i, a^{(-)}]$ u vidu pogodne **aditivne funkcije parcijalnih rastojanja** po obeležjima koja ima svojstva metrike:

$$d\ [\mathrm{a}_\mathrm{i}, a^{(-)}] = f\left\{ \sum_j d\ [x_j, x_j^{(-)}] \right\}$$

Metodologija **rangiranja** i izbora **najpovoljnije** varijante

Obeležjima, odnosno elementima kvaliteta različite prirode, su pridružene odgovarajuće **"parcijalne distance"** ponderisane prosečnim razlikama svakog pojedinačnog obeležja, što predstavlja svojevrsnu normalizaciju "autoponderima" koje generiše sam skup podataka.

Numerička obeležja	Obični i vezani rangovi	Binarna obeležja

$$
\begin{array}{c}
 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
x_1 & x_2 \ldots & x_k & x_{k+1} & \ldots & x_l & x_{l+1} & \ldots & x_m
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
x_{11} & x_{12} \ldots & x_{1k} & x_{1,k+1} & \ldots & x_{1l} & x_{1,l+1} & \ldots & x_{1m} \\
x_{21} & x_{22} \ldots & x_{2k} & x_{2,k+1} & \ldots & x_{2l} & x_{2,l+1} & \ldots & x_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{i1} & x_{i2} \ldots & x_{ik} & x_{i,k+1} & \ldots & x_{il} & x_{i,l+1} & \ldots & x_{im} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} \ldots & x_{nk} & x_{n,k+1} & \ldots & x_{nl} & x_{n,l+1} & \ldots & x_{nm}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
a^{(-)} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
x_1^{(-)} & x_2^{(-)} \ldots & x_k^{(-)} & x_{k+1}^{(-)} & \ldots & x_l^{(-)} & x_{l+1}^{(-)} & \ldots & x_m^{(-)}
\end{array}\right]
$$

Grupe obeležja, odnosno elemenata kvaliteta proizvoda za pojedine varijante $a_1, a_2, \ldots, a_n$

U literaturi koja tretira detaljne matematičke osnove za razvoj i primenu AHP metode, pokazuje se da je **najbolja varijanta ona koja ima najveće rastojanje**

$$d\,[a_i, a^{(-)}]$$

od fiktivno najlošije varijante $a^{(-)}$.

Za rešavanje zadataka višekriterijumskog vrednovanja i rangiranja proizvoda primenjuju se programski sistemi, kao na primer **EXPERT CHOICE**.

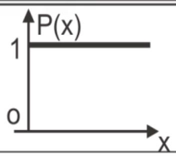
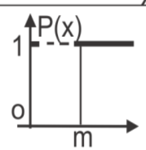
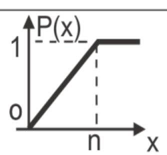
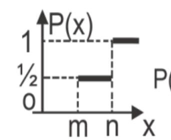
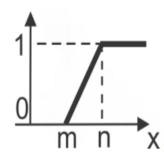
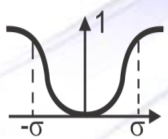
Metoda Promethee

Metoda **PROMETHEE** (*Preference Ranking METhod for Enrichment Evaluations*) je **iteraktivnog karaktera** i sastoji se od **nekoliko koraka**. Omogućava agregaciju **kvalitativnih i kvantitivnih kriterijuma**, različitim po važnosti u relaciju **parcijalnog uređenja u skupu alternativa** PROMETHEE I ili **u jedinstveni rezultat** PROMETHEE II , na osnovu na koje se alternative mogu rangirati **potpuno**.

Metodu PROMETHEE karakterišu sledeći koraci:

Korak 1: Definisanje funkcija preferencije

Postoji **šest oblika funkcija preferencije** koje su zasnovane na intezitetu preferencije.

Analitička definicija	*Naziv kriterijuma*	*Parametri za definisanje*
 $P(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>1\end{cases}$	*Običan kriterijum*	-
 $P(x)=\begin{cases}0 & x\le m\\ 1 & x>m\end{cases}$	*Kvazi kriterijum*	*m*
 $P(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/n & 0\le x\le n\\ 1 & x>n\end{cases}$	*Kriterijum sa linearnom preferencijom*	*n*
 $P(x)=\begin{cases}0 & x\le m\\ \frac{1}{2} & m<x\le n\\ 1 & x\ge n\end{cases}$	*Kriterijum nivoa*	*q,p*
 $P(x)=\begin{cases}0 & x\le m\\ \frac{x-m}{n-m} & m<x\le n\\ 1 & x>n\end{cases}$	*Kriterijum linearne preferencije sa područjem indeferentnosti*	*q,p*
 $p(d)=1-e^{\frac{d^2}{2\sigma^2}}$	*Gausov kriterijum*	σ

Korak 1: Definisanje funkcija preferencije

Vrednost funkcije preferencije kreće se u intervalu [0,1], odnosno što je vrednost funkcije veća ima i veću preferenciju t.j. *P(a,b)* :preferencija *a* u odnosu na *b*.

Prema ovome mogu postojati sledeće **kombinacije** izražavanja funkcije preference:

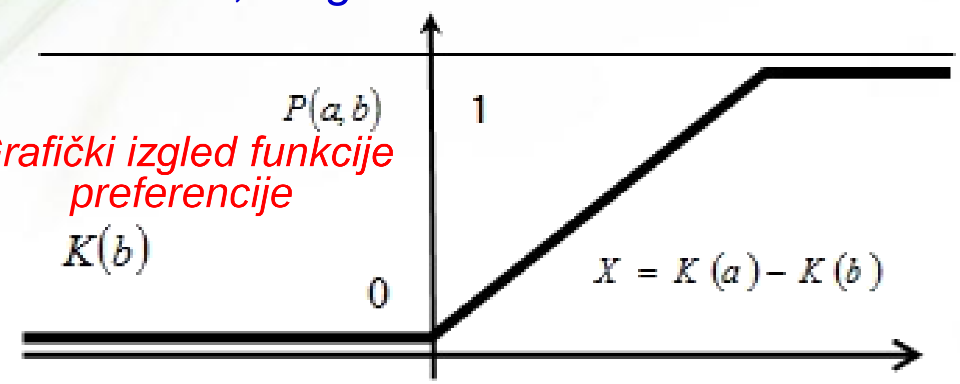
- $P(a,b)=0$ - nema preferencije (indeferencija),
- $P(a,b) \cong 0$ - slaba preferencija, $k(a)>k(b)$
- $P(a,b) \cong 1$ - **jaka** preferencija, $k(a)>>k(b)$
- $P(a,b) = 1$ - **stroga** preferencija, $k(a)>>>k(b)$

Prema tome, moguće su sledeće **osobine funkcije preferencije:**

$$0 \le P(a,b) \le 1$$

$$P(a,b) \neq P(b,a)$$

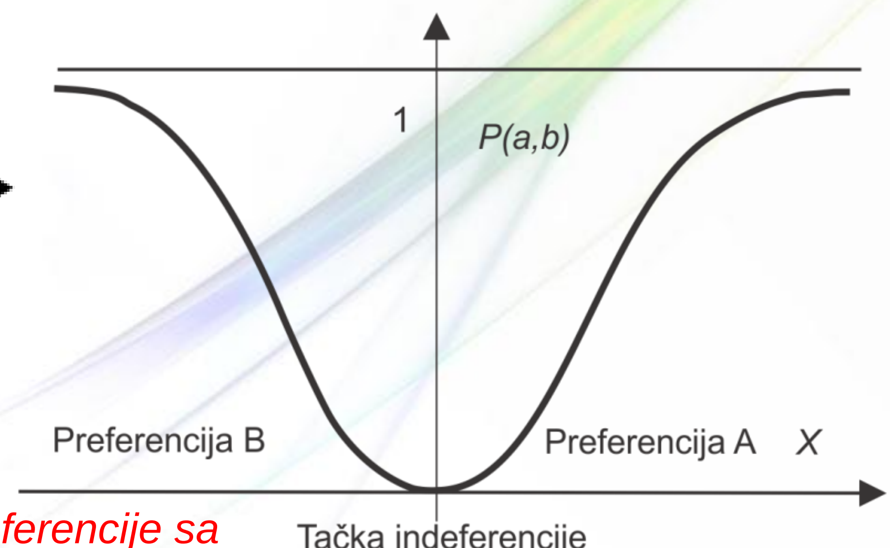
Grafički izgled funkcije preferencije



Drugi način prikazivanja funkcije preferencije je uvođenje promenljive x :

$$x = k(a) - k(b)$$

$$P(x) = \begin{cases} P(a,b), x \ge 0 \\ P(b,a), x \le 0 \end{cases}$$



Funkcija preferencije sa promenljivom

Korak 2: Primena relacije „višeg ranga”

Definisana relacija preferencije upotrebljava se tako da što se **za svaku alternativu izračunaju ulazni i izlazni tok u grafikonu**. Na osnovu tih tokova u skupu alternativa *A* se može uvesti parcijalno uređenje PROMETHEE I ili potpuno uređenje PROMETHEE II.

PROMETHEE I:

Za svaku akciju izračunava se **pozitivni (izlazni)** i **negativni (ulazni tok)** tok.

Izlazni tok: $$\Phi^{+}(a)=T^{+}(a)=\frac{1}{(p-1)}\sum_{x\in A} IP(a,x)$$

Ulazni tok: $$\Phi^{-}(a)=T^{-}(a)=\frac{1}{(p-1)}\sum_{x\in A} IP(a,x)$$

p- ukupan broj alternativa u modelu

PROMETHEE II:

Ukoliko je potrebno uspostaviti potpuni poredak (bez neuporedivosti) tada treba definisati čisti rezultujući tok (balans toka,neto tok), za svaku akciju iz skupa A, $a\in A$

$$\Phi(a)=T(a)=T^{+}(a)-T^{-}(a),$$

koji može da se jednostavno upotrebi u rangiranju akcija:

- a ima viši rang od b - $(aP^{II}b)$ ako i samo ako je $T(a)>T(b)$
- a je indiferentno sa b - $(aI^{II}b)$ ako i samo ako je $T(a)=T(b)$

PROMETHEE II:

PROMETHEE II obezbeđuje potpunu relaciju kod koje su sve akcije iz *A* potpuno rangirane uz napomenu da se kod ove relacije gubi deo informacija zbog balansirajućih efekata između ulaznog i izlaznog toka što rezultuje većem stepenu apstrakcije.
Za efikasnu primenu ove metode pogodno je koristiti odgovarajuća programska rešenja, kao, naprimer, **DecisionLab**.

Druge metode višekriterijumskog vrednovanja i rangiranja

Osim pomenutih metoda, poznate su i druge metode višekriterijumskog vrednovanja i rangiranja proizvoda, među koje spadaju metoda **TOPSIS** i **ELECTRE**.

Metoda **TOPSIS** je razvijena 1981. godine i pogodna je za odlučivanja koja se odnose na **vrednovanje finansija** kompanija istih delatnosti.

Metoda **ELECTRE** je pogodna za rešavanje višekriterijumskog vrednovanja i rangiranja u slučajevima kada **ne postoji mogućnost određivanja stroge matematičke dominacije jedne akcije nad drugom**. Zbog toga se kod ove metode uvodi veza ,,višeg reda”, odnosno definisan je kriterijum za ,,mehaničko” dodeljivanje ranga.